Exponentielles

1 Transformation d'écritures

1.1 Exercice 8

Écrire plus simplement les nombres suivants :

1.1.1 $a = e^x \ e^{-2x}$

$$a = e^{x-2x} = e^{-x}$$

1.1.2 $b = (e^x)^3 \ (e^{-x})^2$

$$b = e^{3x} \ e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$$

1.1.3 $c = \frac{e^{4x}}{e^{3x}}$

$$c = e^{4x-3x} = e^x$$

1.1.4 $d = \frac{e^x}{e}$

$$d = \frac{e^x}{e^1} = e^{x-1}$$

1.2 Exercice 10

Vérifier que pour tout réel x, $\quad \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Solution :

Démontrer la proposition revient à démontrer : $\left(e^x - 1\right)\left(1 + e^{-x}\right) = \left(e^x + 1\right)\left(1 + e^{-x}\right)$ (produit en croix).

$$\begin{aligned} A &= \left(e^x - 1\right)\left(1 + e^{-x}\right) \\ &= e^x + e^{x-x} - 1 - e^{-x} \\ &= e^x - e^{-x} \\ B &= \left(e^x + 1\right)\left(1 - e^{-x}\right) \\ &= e^x - e^{x-x} + 1 - e^{-x} \\ &= e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

$A = B$, la proposition est démontrée.

2 Équations. Inéquations. Systèmes

Pour les exercices 11 à 21, résoudre l'équation ou l'inéquation ou le système proposé.

2.1 Exercice 11 : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Une méthode : poser $X = e^x$.

L'équation devient alors : $\quad X^2 + X - 2 = 0 \quad$ dont une solution visible est $X = 1$.

En factorisant, l'équation devient :

$$(X - 1)(X + 2) = 0$$

Les solutions sont donc :

$$\begin{array}{lll} X = 1 \qquad\qquad & e^x = 1 \qquad\qquad & x = 0 \\ X = -2 & e^x = 2 & x = \ln 2 \end{array}$$

2.2 Exercice 12 : $e^{2x} - 3 = 4\, e^{-2x}$

En posant $X = e^{2x}$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} &X - 3 = 4\, X^{-1} \\ &X^2 - 3\, X - 4 = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation a comme solution visible $\quad X = -1$. La seconde est alors $\quad X = 4$.

Les solutions sont donc :

$$\begin{array}{llll} X = -1 & e^{2x} = (e^x)^2 = -1 & \text{impossible} & \\ X = 4 & e^{2x} = (e^x)^2 = 4 & e^x = 2 & x = \ln 2 \end{array}$$

La valeur $e^x = -2$ ne convient pas, car l'exponentielle est toujours positive.

2.3 Exercice 13 : $e^{3x} = 8\ e^x$

Avec $X = e^x$ et en divisant par e^x jamais nul :

$$e^{2x} = X^2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad X = \sqrt{8} = 2^{3/2} = e^x$$
$$x = \ln(2^{3/2}) = \frac{3\ \ln 2}{2}$$

2.4 Exercice 14 : $e^{3x+1} + e^{2x+1} = 6\ e^{x+1}$

On peut écrire l'équation :

$$e^{2x}\ e^{x+1} + e^x\ e^{x+1} = 6\ e^{x+1}$$

En divisant par e^{x+1} jamais nul et en posant $X = e^x$, il vient : $X^2 + X - 6 = 0$ dont les racines sont :

$$\begin{array}{ll} X = e^x = 2 \qquad \Rightarrow & x = \ln 2 \\ X = e^x = -3 & \text{impossible} \end{array}$$

2.5 Exercice 16 : $e^{x^2}\ e^x \leqslant e^6$

On peut écrire l'équation :

$$e^{x^2}\ e^x = e^{x^2+x} \leqslant e^6$$

La fonction exponentielle étant continue, monotone et croissante, on a :

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad e^x \leqslant e^y$$

Dans notre cas, on en déduit :

$$\begin{aligned} x^2 + x &\leqslant 6 \\ x^2 + x - 6 &\leqslant 0 \\ (x+3)\ (x-2) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

L'étude de signe du produit donne comme solutions : $-3 \leqslant x \leqslant 2$

c'est-à-dire : $x \in [-3\ ;\ 2]$.

2.6 Exercice 18 : $e^{2x} + e^x - 2 \ < \ 0$

En posant $X = e^x$, l'équation devient : $\quad f(X) = X^2 + X - 2 < 0$.

On remarquera que $X = e^x > 0$: la fonction $f(X)$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Les racines sont $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$, la première valeur ne convenant pas.

La courbe représentative de la fonction $f(X)$ est la partie pour $X > 0$ d'une parabole décroissante, puis croissante. Elle est négative entre les deux racines. En tenant compte du domaine de définition de $f(X)$:

$$\begin{array}{rcl} f(X) < 0 & \Rightarrow & X \in]\, 0\ ;\ 1\, [\\ X = e^x \in]\, 0\ ;\ 1\, [& \Rightarrow & x \in]-\infty\ ;\ 0\, [\end{array}$$

3 Dérivées

Pour les exercices 22 à 32, trouver la fonction dérivée de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné.

3.1 Exercice 22 : $f(x) = x^2\ e^x \qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x^2 & \Rightarrow & u'(x) = 2\ x \\ v(x) = e^x & \Rightarrow & v'(x) = e^x \\ f(x) = u(x)\ v(x) & \Rightarrow & f'(x) = u(x)\ v'(x) + u'(x)\ v(x) \\ f'(x) = x^2\ e^x + 2\ x\ e^x = x\ (x+2)\ e^x & & \end{array}$$

3.2 Exercice 23 : $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

$$(e^x)' = e^x \qquad ; \qquad (e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3.3 Exercice 24 : $f(x) = 2\ e^x - x\ e^2 \qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2\ e^x - e^2$$

3.4 Exercice 25 : $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{-2} & \Rightarrow \qquad & u'(x) = 2\,x^{-3} \\
f(x) &= e^{u(x)} & \Rightarrow \qquad & f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)} \\
f'(x) &= 2\,\frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} & &
\end{aligned}$$

3.5 Exercice 26 : $f(x) = e^{\sin x} \qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sin x & \Rightarrow \qquad & u'(x) = \cos x \\
f(x) &= e^{u(x)} & \Rightarrow \qquad & f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)} \\
f'(x) &= \cos x\;e^{\sin x} & &
\end{aligned}$$